# Mathematik: Analyse und Ansätze
## Leistungsstufe
## 1. Klausur

Freitag, 6. Mai 2022 (Nachmittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

2 Stunden

---

**Hinweise für die Kandidaten**

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antwortheftes ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.



2222 – 7126

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

## Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

**1.** [Maximale Punktzahl: 5]

Das $n$-te Glied einer arithmetischen Folge ist gegeben durch $u_n = 15 - 3n$.

(a) Geben Sie den Wert des ersten Glieds $u_1$ an. [1]

(b) Das $n$-te Glied dieser Folge sei $-33$. Finden Sie den zugehörigen Wert von $n$. [2]

(c) Finden Sie die gemeinsame Differenz $d$. [2]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**2.** [Maximale Punktzahl: 6]

Betrachten Sie drei beliebige aufeinanderfolgende ganze Zahlen $n-1$, $n$ und $n+1$.

(a) Beweisen Sie, dass die Summe dieser drei ganzen Zahlen immer durch $3$ teilbar ist. [2]

(b) Beweisen Sie, dass die Summe der Quadrate dieser drei ganzen Zahlen niemals durch $3$ teilbar ist. [4]

**3.** [Maximale Punktzahl: 8]

Eine Funktion $f$ ist definiert durch $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$.

(a) Der Graph von $y = f(x)$ hat eine vertikale und eine horizontale Asymptote.

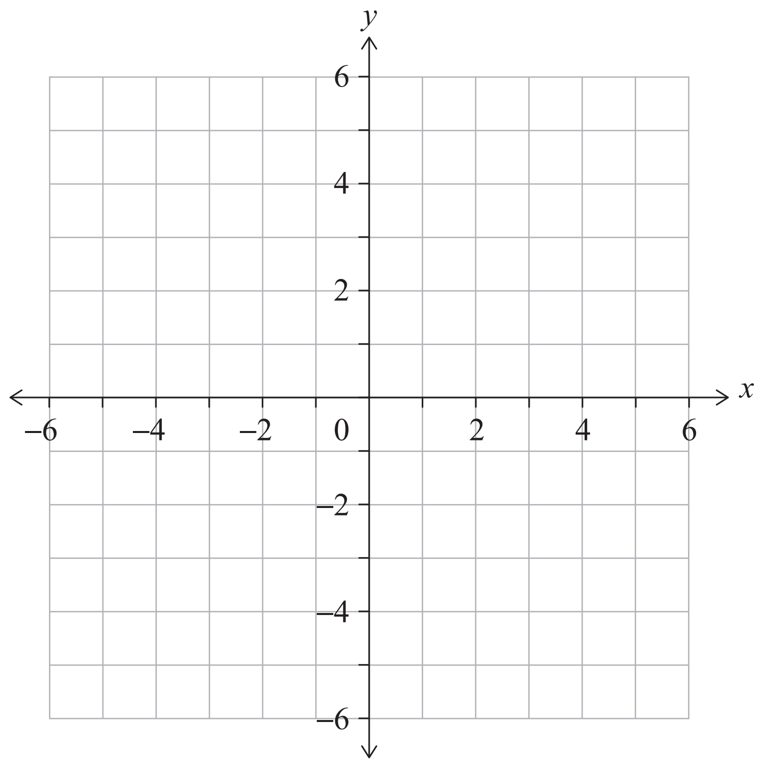
Notieren Sie die folgenden Gleichungen:

(i) Die der vertikalen Asymptote;

(ii) Die der horizontalen Asymptote. [2]

(b) Skizzieren Sie im folgenden Diagramm den Graphen von $y = f(x)$ .

Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze deutlich die Asymptoten und die Lage aller Schnittpunkte mit den Achsen. [3]




(c) Lösen Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Ungleichung $0 < \dfrac{2x-1}{x+1} < 2$. [1]

(d) Lösen Sie die Ungleichung $0 < \dfrac{2|x|-1}{|x|+1} < 2$. [2]

**(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)**

**(Fortsetzung Frage 3)**

**4.** [Maximale Punktzahl: 5]

Finden Sie den kleinsten positiven Wert von $x$, für den $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt.

**5.** [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie die Binomialentwicklung $(x+1)^7 = x^7 + ax^6 + bx^5 + 35x^4 + ... + 1$ mit $x \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Zeigen Sie, dass hier für $b$ gilt: $b = 21$. [2]

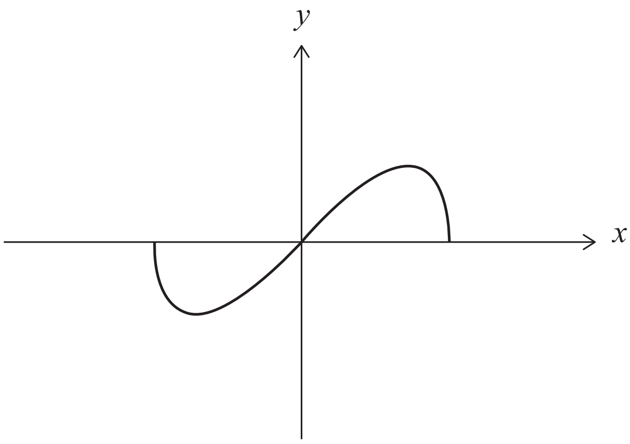
Der dritte Term dieser Entwicklung ist der Durchschnittswert aus dem zweiten und dem vierten Term der Entwicklung.

(b) Finden Sie die möglichen Werte von $x$. [5]

**6.** [Maximale Punktzahl: 8]

Eine Funktion $f$ ist definiert durch $f\left(x\right)=x\sqrt{1-x^2}$ mit $-1 \le x \le 1$.

Der Graph von $y=f(x)$ ist nachfolgend dargestellt.




(a) Zeigen Sie, dass $f$ eine ungerade Funktion ist. [2]

Der Wertebereich von $f$ ist $a \le y \le b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Finden Sie die Werte von $a$ und $b$. [6]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**7.** [Maximale Punktzahl: 6]

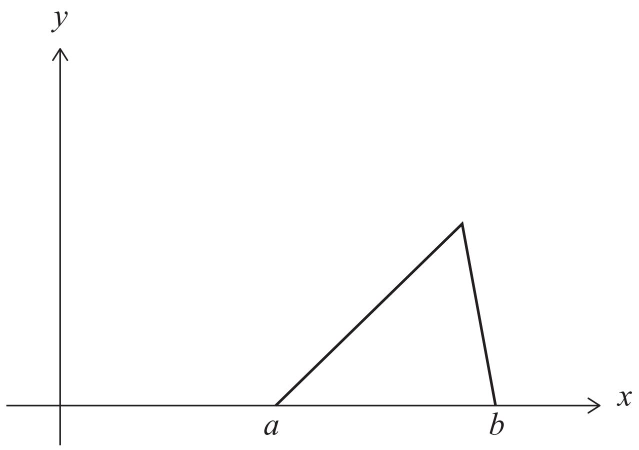
Finden Sie durch Verwendung der Substitution $u = \sec x$ oder auf andere Weise einen Ausdruck für $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^n x \tan x \, \mathrm{d}x$ abhängig von $n$, wobei $n$ eine reelle Zahl ungleich Null ist.

**8.** [Maximale Punktzahl: 6]

Eine stetige Zufallsvariable $X$ hat die Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{(b-a)(c-a)}(x-a), & a\le x\le c\\ \dfrac{2}{(b-a)(b-c)}(b-x), & c<x\le b\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

Das folgende Diagramm zeigt den Graphen von $y=f(x)$ für $a\le x\le b$.




Finden Sie unter der Annahme, dass $c\ge\dfrac{a+b}{2}$ gilt, einen Ausdruck für den Median von $X$ abhängig von $a$, $b$ und $c$.

**9.** [Maximale Punktzahl: 5]

Beweisen Sie durch Widerspruch, dass die Gleichung $2x^3 + 6x + 1 = 0$ keine ganzzahligen Lösungen hat.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

## Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

**10.** [Maximale Punktzahl: 16]

Ein gezinkter vierseitiger Würfel, dessen Flächen mit $1$, $2$, $3$ und $4$ beschriftet sind, wird geworfen und das Ergebnis wird notiert. $X$ sei das Ergebnis des Würfelns. Die folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $X$, wobei $p$ und $q$ Konstanten sind.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $p$ | 0,3 | $q$ | 0,1 |

Für diese Wahrscheinlichkeitsverteilung ist bekannt, dass $\mathrm{E}(X)=2$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass für $p$ und $q$ gilt: $p=0{,}4$ und $q=0{,}2$. [5]

(b) Finden Sie $\mathrm{P}(X>2)$. [2]

Nicky spielt ein Spiel mit diesem vierseitigen Würfel. Bei diesem Spiel darf sie maximal fünfmal würfeln. Ihre Punktzahl wird durch Addition der Ergebnisse der einzelnen Würfe berechnet. Nicky gewinnt das Spiel, wenn sie mindestens zehn Punkte erreicht hat.

Nach dreimaligem Würfeln ist Nickys Ergebnis vier.

(c) Finden Sie unter der Annahme, dass die einzelnen Würfe voneinander unabhängig sind, die Wahrscheinlichkeit, dass Nicky das Spiel gewinnt. [5]

David hat zwei Paar nicht gezinkte vierseitige Würfel, nämlich ein gelbes und ein rotes Paar. Die Flächen der beiden gelben Würfel sind mit $1$, $2$, $3$ und $4$ beschriftet. Sei $S$ die Summe der Augenzahl beim Wurf der beiden gelben Würfel. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $S$ ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

| $s$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(S=s)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

Die Flächen des ersten roten Würfels sind mit $1$, $2$, $2$ und $3$ beschriftet. Die Flächen des zweiten roten Würfels sind mit $1$, $a$, $a$ und $b$ beschriftet, wobei $a<b$ und $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Summe der Augenzahlen beim Würfeln des roten Würfelpaares ist die gleiche wie für die Summe der Augenzahlen beim Würfeln des gelben Würfelpaares.

(d) Bestimmen Sie den Wert von $b$. [2]

(e) Finden Sie den Wert von $a$ und begründen Sie Ihre Antwort. [2]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

**11.** [Maximale Punktzahl: 20]

Eine Funktion $f$ ist definiert durch $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, mit $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -1$, $x\neq 3$.

(a) Skizzieren Sie die Kurve $y=f(x)$ und geben Sie dabei alle Asymptoten mit ihren Gleichungen deutlich an. Geben Sie die Koordinaten aller lokalen Maxima oder Minima und aller Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an. [6]

Eine Funktion $g$ ist definiert durch $g(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, mit $x\in\mathbb{R}$, $x>3$.

(b) Die Inverse von $g$ ist $g^{-1}$.

(i) Zeigen Sie, dass gilt: $g^{-1}(x)=1+\dfrac{\sqrt{4x^2+x}}{x}$.

(ii) Geben Sie die Definitionsmenge von $g^{-1}$ an. [7]

Eine Funktion $h$ ist definiert durch $h(x)=\arctan\dfrac{x}{2}$, mit $x\in\mathbb{R}$.

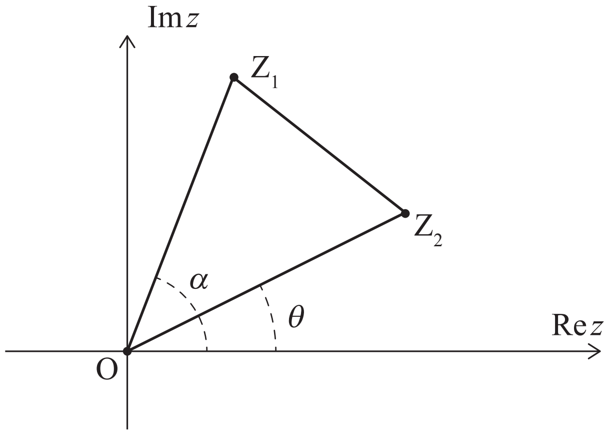
(c) Es sei $(h\circ g)(a)=\dfrac{\pi}{4}$. Finden Sie den Wert von $a$.

Stellen Sie Ihre Antwort in der Form $p+\dfrac{q}{2}\sqrt{r}$ dar, mit $p$, $q$, $r\in\mathbb{Z}^+$. [7]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

**12.** [Maximale Punktzahl: 18]

Im folgenden Argand-Diagramm sind die Punkte $Z_1$, $O$ und $Z_2$ die Eckpunkte des Dreiecks $Z_1OZ_2$ gegen den Uhrzeigersinn beschriftet.




Der Punkt $Z_1$ stellt die komplexe Zahl $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$ dar, mit $r_1 > 0$. Der Punkt $Z_2$ stellt die komplexe Zahl $z_2 = r_2 e^{i\theta}$ dar, mit $r_2 > 0$.

Die Winkel $\alpha$ und $\theta$ werden gegen den Uhrzeigersinn in positiver Richtung von der reellen Achse aus gemessen, so dass gilt: $0 \le \alpha, \theta < 2\pi$ und $0 < \alpha - \theta < \pi$.

(a) Zeigen Sie, dass $z_1 z_2{}^* = r_1 r_2 e^{i(\alpha - \theta)}$ gilt, wobei $z_2{}^*$ die komplex konjugierte Zahl von $z_2$ ist. [2]

(b) Zeigen Sie unter der Annahme, dass $\mathrm{Re}(z_1 z_2{}^*) = 0$ gilt, dass $Z_1OZ_2$ ein rechtwinkliges Dreieck ist. [2]

In den Teilen (c), (d) und (e) betrachten wir den Fall, dass $Z_1OZ_2$ ein gleichseitiges Dreieck ist.

(c) (i) Drücken Sie $z_1$ abhängig von $z_2$ aus.

(ii) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $z_1{}^2 + z_2{}^2 = z_1 z_2$ gilt. [6]

Es seien $z_1$ und $z_2$ die beiden unterschiedlichen Lösungen der Gleichung $z^2 + az + b = 0$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil (c)(ii), dass $a^2 - 3b = 0$ gilt. [5]

Betrachten Sie nun die Gleichung $z^2 + az + 12 = 0$, mit $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$.

(e) Deduzieren Sie unter Verwendung von $0 < \alpha - \theta < \pi$, dass nur genau ein gleichseitiges Dreieck $Z_1OZ_2$ aus dem Punkt $O$ und den Lösungen dieser Gleichung gebildet werden kann. [3]

---

**Quellen:**

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.